

**ラールス進学塾 案内 (一貫校生) 演習問題略解**

中1～  $7^{4848}$  を48で割った余りを求めよ。

【略解】  $7^2$  を48で割ると余りは1.

$7^{2n} = (7^2)^n$  であるから (nは自然数),  $7^{2n}$  を48で割った余りは  $(1)^n$  である.

$7^{4848} = (7^2)^{2424}$  であるから,  $7^{4848}$  を48で割った余りは1 -----(答)

中2～  $x^5 - 1$  を因数分解せよ (上級生は複素数の範囲で)。

【略解】  $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$  ----- (答)

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 &= x^2(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 \right\} \text{-----} \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで,  $x + \frac{1}{x} = A$  とおくと, ①は  $x^2(A^2 + A - 1)$

2次方程式の解の公式により  $A$  を求めて,  $x$  で整理すると

$$\textcircled{1} = \left(x^2 + 1 - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}x\right) \left(x^2 + 1 - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}x\right)$$

$$\text{ゆえに, } x^5 - 1 = (x - 1) \left(x^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1\right) \left(x^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x + 1\right)$$

さらに複素数の範囲での因数分解をすると、2次方程式の解の公式より、

$$\begin{aligned} x^5 - 1 &= (x - 1) \left(x - \frac{-1 - \sqrt{5} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}i\right) \left(x - \frac{-1 - \sqrt{5} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}i\right) \times \\ &\quad \left(x - \frac{-1 + \sqrt{5} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}i\right) \left(x - \frac{-1 + \sqrt{5} - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}i\right) \text{-----} \text{(答)} \end{aligned}$$

中3～ 最大角が  $120^\circ$  である三角形 ABC の 3 辺の長さを求めよ (3 辺の長さは互いに異なる素数とする)。

【略解】 3 辺を  $a, b, c$  ( $a > b > c$ ) とおくと、余弦定理より,  $a^2 = b^2 + c^2 + bc$

$$bc = (b+c+a)(b+c-a)$$

$a, b, c$  は互いに異なる素数であるから,  $b+c+a = bc$ ,  $b+c-a = 1$

辺々加えて  $bc - 2b - 2c + 1 = 0$

$$(b-2)(c-2) = 3, \quad a > b > c \text{ より } b=5, c=3, a=7$$

ゆえに, 求める 3 辺の長さは 3, 5, 7 -----(答)

高1～ 三角形 ABC において,  $\cos A + \cos B + \cos C$  の最大値を求めよ。

【略解】 和→積の公式より,  $\cos B + \cos C = 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}$

$$= 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}$$

$$\text{(与式)} = \cos A + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \text{ -----①}$$

A を固定して考えると、 $A+B+C = \pi$  の条件において①が最大になるのは

$$B=C \text{ のとき、 } \text{(与式)} \leq \cos A + 2 \sin \frac{A}{2} \text{ -----②}$$

$\cos A = 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2}$  であるから、②を整理すると

$$\text{②} = -2 \left( \sin \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2}$$

$0 < \sin \frac{A}{2} < 1$  であるから、 $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$  のとき最大値  $\frac{3}{2}$  をとる。

以上より、求める最大値は  $\frac{3}{2}$  -----(答)

英 語

---

中3～ 和訳問題

Creative thinking may well mean simply the realization that there's no particular virtue in doing things the way they have always been done. (東京大 1995 )

「創造的な思考とは、物事をいつも通りのやり方で行うことに特別な価値はないと認識することを端的に意味するのであろう。」

※ 和訳問題としては平易ですが、その分 may well などを丁寧に訳出することが大切でしょう。

「大いに～そうだ、～もっともだ」ではなく、「多分に～だろう」とすべきです。

-----

以上、考えてくれた皆さん、解答にアクセスしてくれた皆さん、ありがとうございました。

シンプルなのにどれも有名問題ですが、シンプルなものにこそ本質が隠されています。

思考トレーニングには良い問題だと思いますので、解けなかった方は繰り返して

習得されると良いでしょう。ラルス進学塾に参加されている方はもちろん、

参加されない方もその才能を開花されるよう応援しております。

【追記】英語和訳を少し修正しました、翻訳ではなく「受験的に無難」な感じに。

また、複素数の範囲での因数分解も解答を付記しました。